DOI: http://doi.org/10.62994/Lab-67.2024.innovconf.11-omorov

Р.О. Оморов

Приложения метода топологической грубости к синергетическим системам в экономике

В современный период развития экономической науки все большее развитие получают методы исследований на основе математических моделей экономических систем. Процессы в экономике в большинстве случаев описываются моделями динамических систем [1]. Важными свойствами динамических систем являются свойства грубости таких систем к внешним и параметрическим возмущениям. Исследованиям грубости динамических систем, оценки робастности и синтеза грубых (робастных) систем уделяется большое внимание в современной теории динамических систем и теории управления [2–5].

В теории динамических систем существуют два различных подхода к проблеме грубости:

1) на основе понятия грубости по Пейксото, или, иначе, – «структурной устойчивости»;

2) на основе понятия грубости по Андронову–Понтрягину, когда, в отличие от предыдущего, требуется ε-близость исходного и возмущенного гомеоморфизмов [2, 3, 6].

В работе [7] на базе понятия грубости по Андронову–Понтрягину были заложены основы «метода топологической грубости», который позволяет исследовать грубость (робастность) и бифуркации динамических систем различной природы, в частности, синергетических систем, а также синтезировать грубые (робастные) системы управления [8].

В данной работе представлены приложения «метода топологической грубости» к исследованиям грубости и бифуркаций синергетических систем в экономике [8, 9].

Основные утверждения метода топологической грубости

Базовые утверждения метода в кратком изложении представим в виде теорем, которые доказаны в работах автора [5, 7, 8, 10, 11].

В работе [2] впервые дано понятие грубости, которое впоследствии названо понятием грубости по Андронову–Понтрягину [3], и сформулированы качественные критерии грубости.

В многомерной постановке рассматривается динамическая система n-го порядка

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)), \qquad (1)$$

где $\mathbf{z}(t) \in R^n$ – вектор фазовых координат; $\mathbf{F}$ – n-мерная дифференцируемая вектор-функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову–Понтрягину в некоторой области G, если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти $\tilde{G}$, области G:

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{z}}) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}}), \qquad (2)$$

являются ε-тождественными в топологическом смысле.

Теорема 1. *Для того чтобы динамическая система в окрестности гиперболической особой точки ($\mathbf{z}_0$) была максимально грубой, а в окрестности негиперболической –минимально негрубой, необходимо и достаточно иметь:*

$$\mathbf{M}^* = argmin\, \mathrm{C}\{\mathbf{M}\},$$

где $\mathbf{M}$ *– матрица приведения матрицы линейной части* $\mathbf{A}$ *системы (1), в особой точке ($\mathbf{z}_0$) к диагональному (квазидиагональному) базису;* C{$\mathbf{M}$} *– число обусловленности матрицы* $\mathbf{M}$, *являющийся мерой грубости системы (1).*

Теоретические результаты метода топологической грубости, полученные в [7, 10, 11], позволяют управлять грубостью синергетических систем; соответствующая теорема доказана в [7].

Рассматривается система

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}(\mathbf{z}, \mathbf{u}), \qquad (3)$$

где $\mathbf{z} \in R^n, \mathbf{u} \in R^r$ – соответственно вектора фазовых координат и управлений системы; $\mathbf{Q}(.)$ – n-мерная нелинейная дифференцируемая вектор-функция.

Возможности управления грубостью определяются условиями следующей теоремы.

Теорема 2. *Для того чтобы в управляемой динамической системе (3), описываемой в n-мерном фазовом пространстве с помощью матриц линейного приближения* ***A***, ***B*** *соответственно для фазовых координат и управлений, существовало управление* $\mathbf{u}$ *(t), обеспечивающее в окрестности соответствующей особой точки замкнутой системы максимальную грубость или минимальную негрубость, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия невырожденной разрешимости матричного уравнения Сильвестра* [12].

Метод топологической грубости также позволяет определять бифуркации динамических систем на основе критериев, разработанных в [5, 7, 8, 10, 11]. Более того, метод представляет возможности прогнозирования бифуркаций, а также управления параметрами бифуркаций. Соответствующее утверждение, которое доказано в работах автора, сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Для того чтобы в области G многомерной (n>2) динамической системы при значении параметра* $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^*$, $\boldsymbol{q} \in R^p$ *возникла какая-нибудь бифуркация топологической структуры, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) или в рассматриваемой области G динамической системы существуют негиперболические (негрубые) особые точки, или орбитально-неустойчивые предельные циклы, для которых имеет место равенство

$$C\{\mathbf{M}(\mathbf{q}^*)\} = \min \sum_{i=1}^{p} C_i \{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}, \tag{4}$$

где p – количество особых точек или предельные циклы в области G;

2) или в области G динамической системы имеются какие-либо грубые особые точки или предельные циклы, для которых выполняется условие

$$C\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} = \infty. \tag{5}$$

Модели экономических систем

Положения теории и возможности «метода топологической грубости» успешно апробированы на различных моделях синергетической экономики, таких как: *усовершенствованная модель Калдора; модель Кейнса; модель Солоу; модель типа Шумпетера* [1, 9 – 11].

Здесь, рассмотрим две модели экономических систем: *усовершенствованную модель Калдора* и *модель типа Шумпетера.*

Усовершенствованная модель Калдора характеризует деловые циклы и представляется следующей системой уравнений:

$$\dot{x} = \alpha\,[R(x, z) + I(x, y) - x], \quad \dot{y} = I(x, y) - I_0, \tag{6}$$

где x, y, z – соответственно переменные национального дохода, капитала и благосостояния; $R(x, z)$, $I(x, y)$ – соответственно функции расходов на потребление и объемов инвестиций; I_0 – «замещение» инвестиций; α – коэффициент адаптации цикла (скорость установления).

Функция расходов на потребление:

$$R(x, z) = r(z)x + S(z), \tag{7}$$

а функция сбережений:

$$T(x, z) = x - R(x, z). \tag{8}$$

Функция инвестиций $I(x, y)$ имеет вид логистической функции.

Состояния равновесия системы (6) удовлетворяют соотношениям:

$$T(x, z) = I(x, y), \;\; I(x, y) = I_0. \tag{9}$$

В системе (6) возможны либо одна, либо три точки равновесия (особые точки (ОТ)).

Полагая $R(x, z) = \mathrm{const}$, $I(x, y) = \beta$, будем иметь следующие матрицы линейной части (6) в окрестностях ОТ$_i$, $i = 1,2,3$:

$$A_{1,3} = [-1, -1;\, 0, -1]^{\mathrm{T}}, \quad A_2 = [\beta - 1, -1;\, \beta, -1]^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

Соответственно в особых точках (OT_1, OT_3) будем иметь «устойчивый узел», а в особой точке (OT_2): при $0 < \beta < 2$ – «устойчивый фокус»; при $2 < \beta < 4$ – «неустойчивый фокус»; при $\beta > 4$ – «неустойчивый узел».

При значении $\beta = 2$ в системе (6) происходит бифуркация рождения предельного цикла (Хопфа).

Характеристическое уравнение в особой точке (OT_2):

$$\lambda^2 - \lambda(\beta - 2) + 1 = 0,$$

а показатель грубости C{M} будет равен $C\{M\} = \min_\beta C\{M\} \approx 2{,}62$.

Возможные устойчивые состояния равновесия (особые точки) имеют форму катастрофы (бифуркаций) типа «сборка».

Модель типа Шумпетера. В рассматриваемой модели, идентичной частному и государственному промышленному производству, исследуется поведение инвестора (и инноватора), а также его стратегия в условиях конкуренции, которые нечувствительны к влияниям макроэкономики и инвестициям, «индуцированным спросом». На этой модели исследуются неравновесные движения экономических систем индустрий стран и регионов.

Рассматривается модель типа Шумпетера, описываемая системой уравнений:

$$\dot{x} = sh(y + kx) - xch(y + kx) = P(x, y, k), \qquad (11)$$
$$\dot{y} = -\mu[a_0\, sh(8x) + (y - a_1)ch(8x)] = Q(x, y, \gamma),$$

где x, y – соответственно переменные индекса конфигураций инвесторов и «альтернатора» – переключателя предпочтений инвестора между инвестициями экспансионного и рационализационного типов; k – параметр координатора, отражающий интенсивность взаимодействия индивидуальных инвесторов; sh(·), ch(·) – функции гиперболических синуса и косинуса; $\mu = M/\delta$ – относительный параметр, M – параметр стратегической гибкости инвесторов относительно изменения стратегии от экспансионной к рационализационной и обратно, δ – параметр временного масштаба, определяющий реальное время $t = \tau / 2\delta$, где τ – переменная времени в системе (11); γ – параметр скорости тенденции к повороту стратегии; a_1 – параметр влияния стратегии – положительный при экспансионном и отрицательный – при рационализационном выборе; a_0 – амплитуда стратегического выбора.

Условия положений равновесия (особых точек, ОТ):

$$P(x_0, y_0, k) = 0, \quad Q(x_0, y_0, \gamma) = 0,$$

определяют либо одну, либо три, либо пять особых точек, которые соответствуют конкретно заданным параметрам системы (11).

Установлено, что в системе (11) возможны бифуркации Хопфа с возникновением предельных циклов.

В частности, при значениях параметров: $a_0 = 0{,}5$; $a_1 = 0$; $\gamma = 4{,}0$; $\mu = 0{,}5$, имеем единственную особую точку в начале координат $x_0 = y_0 = 0$.

Матрица якобиана имеет вид:

$$A_0 = [k - 1,\ 1;\ -1,\ -0{,}5]^T.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda(1{,}5 - k) - 0{,}5k + 1{,}5 = 0,$$

а собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = (k - 1{,}5) / 2 \pm 1/2\sqrt{[(k\text{-}1{,}5)^2 + 2k - 6]}.$$

Если в качестве управляющего параметра принять параметр k, то при значениях $k = 1{,}5$; $k = 2{,}5$; $k = 3$ происходят бифуркации в системе (11). При этом, при $k = 1{,}5$ наблюдается бифуркация перехода с «устойчивого фокуса» на «неустойчивый фокус». При $k = 2{,}5$ происходит бифуркация изменения топологии пространства (x, y) , ОТ (0,0) меняется от «неустойчивого фокуса» на «неустойчивый узел», а при $k \geq 3$ происходит переход на «седло».

Результаты исследования грубости системы (11) вблизи ОТ (0,0) показаны на рис. 1.

Как видно из рисунка, при $k = 0{,}5$ система будет максимально грубой с $C\{M\} = 1$, или иначе: моделируемая экономическая система будет при этом с наилучшей грубостью.

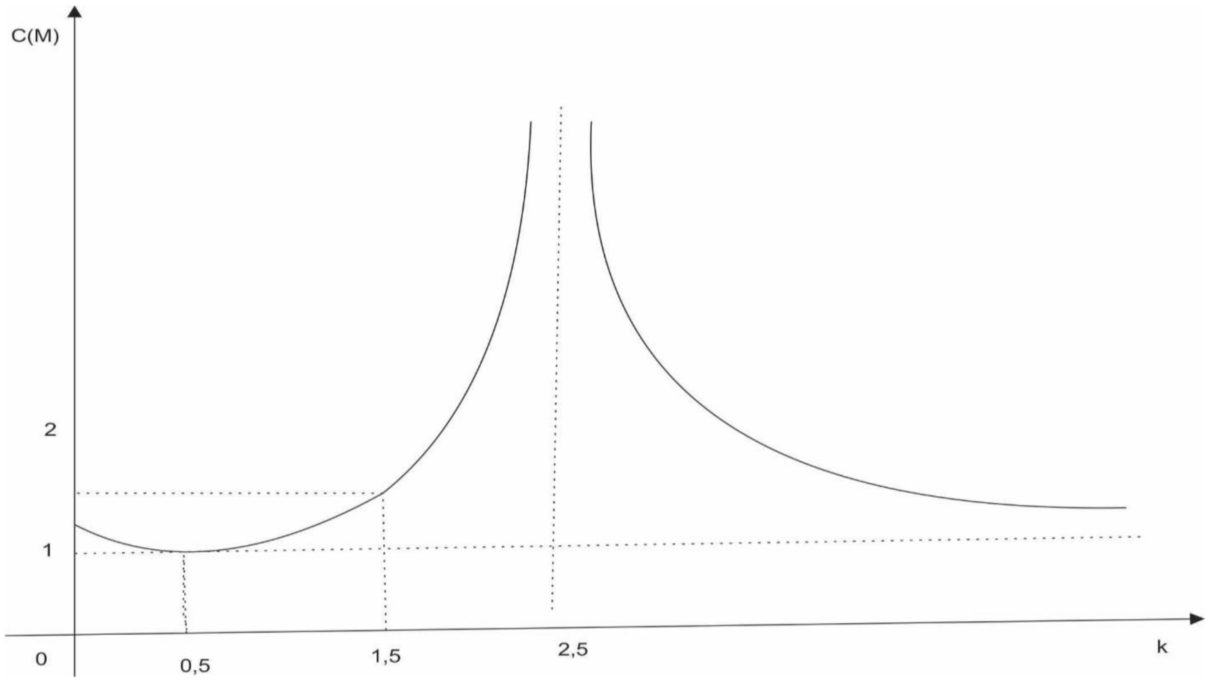

Рис. 1. График зависимости C{M} = *f*(*k*)

Заключение

Предложенный для исследований синергетических экономических систем «метод топологической грубости», разработанный автором на базе понятия грубости по Андронову–Понтрягину, является методом количественного исследования грубости и бифуркаций динамических систем самого широкого класса и различной физической природы. Возможности метода для исследований грубости и бифуркаций показаны на примерах моделей экономических систем типа Шумпетера и Калдора, но в работах автора [8 – 11] и др. апробированы для исследований синергетических систем Лоренца, Рёсслера, Белоусова–Жаботинского, Чуа, «хищник-жертва», динамо Рикитаке, отображения Хенона, бифуркаций Хопфа, и др. При этом результаты метода, полученные на вышеперечисленных системах, согласуются с известными результатами других исследователей этих систем. Отметим, что метод может быть использован для исследований как других синергетических систем различной природы, так и для исследований динамических систем более широкого класса, в частности, при исследованиях колебательных систем, бифуркаций Хопфа, а также аттракторов дискретных отображений.

Литература

1. Занг, В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории: Пер. с англ. / В.Б. Занг. – М.: Мир, 1999. – 335 с.
2. Андронов, А.А. Грубые системы / А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14. № 5. – С. 247–250.
3. Аносов, Д.В. Грубые системы / Д.В. Аносов // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сборник обзорных статей: К 50-летию института (Труды МИАН СССР. Т. 169). – М.: Наука, 1985. – С. 59–93.
4. Поляк, Б.Т. Робастная устойчивость линейных систем / Б.Т. Поляк, Я.З. Цыпкин // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т. 32. – М.: ВИНИТИ, 1991. – С. 3-31.
5. Оморов, Р.О. Метод топологической грубости динамических систем: Приложения к синергетическим системам / Р.О. Оморов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 2. – С. 257-262.
6. Peixoto M.M. On structural stability // Ann. Math. 1959. V. 69. N 1. P. 199-222.
7. Оморов, Р.О. Максимальная грубость динамических систем / Р.О. Оморов // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. – С. 36-45.
8. Оморов, Р.О. Синергетика и хаос: Топологическая грубость и бифуркации / Р.О.Оморов. – М.: ЛЕНАНД, 2022. – 160 с.
9. Оморов, Р.О. Синергетический подход к экономическим системам / Р.О. Оморов // Наука и новые технологии. 2003. № 2. – С. 100-105.
10. Оморов, Р.О. Теория топологической грубости систем / Р.О. Оморов. – Бишкек: Илим, 2019. – 288 с.
11. Omorov R. Theory of Topological Roughness of Systems: Applications to Synergetic Systems and Chaos // Beau Bassin: LAP LAMBERT, 2019. – 220 p.
12. Акунов, Т.А. Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывными объектами / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков. – Бишкек: Илим, 1991. – 61 с.